Opg 1

1) $L x = \bar{0}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $R_2 - 2R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} R_1 + R_2 \\ -R_2 \\ R_3 + 2R_2 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $L x = \bar{0} \Leftrightarrow x = \bar{0}$, dvs

$N(L) = \{0\}$ og L er injektiv.

2) $R(L) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$, hvor de to søjler er en basis da de er lin. uafh. (jfr 1)

$\dim R(L) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, så L er ikke surjektiv

3) $L x = y$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 2 & 1 & y_2 \\ 0 & 2 & y_3 \end{bmatrix}$ $R_2 - 2R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 2 & y_3 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} R_1 + R_2 \\ -R_2 \\ R_3 + 2R_2 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_2 - y_1 \\ 0 & 1 & 2y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & y_3 + 2y_2 - 4y_1 \end{bmatrix}$

Heraf ses, at $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ 2y_1 - y_2 \end{bmatrix}$ og

$y_3 = 4y_1 - 2y_2$ hvis $y \in R(L)$

4) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \bar{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

De tre vektorer er lin. uafh. og derfor en basis for $\mathbb{R}^3$.

5) Søjlerne i afbildningsmatricen er koordinaterne til billederne af ~~de~~ basis-vektorerne i $\mathbb{R}^2$ m.h.t den valgte basis i $\mathbb{R}^3$. Vi skal altså finde søjlerne $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$'s koordinater

m h t v_1, v_2, v_3.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

løses som

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_2 - R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

hvorfor $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-1, 2, 0)$
$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, -1, 2)$ så $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mht v_1, v_2, v_3.

Opg 2

Da $v_1 \cdot v_2 = 0$ 1) er $v_2 = (1,-1)$ en mulighed.

2) ~~Da~~ $\cancel{B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}$

Da $B = Q D_B Q^T$, med $D_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

og $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ gælder

$$\underline{B^T} = (Q D_B Q^T)^T = Q^{TT} D_B^T Q^T = Q D_B Q^T = \underline{B}$$

3) $AB = Q D_A Q^T Q D_B Q^T$, $D_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$= Q D_A D_B Q^T$$

$$= Q \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} Q^T = \begin{bmatrix} 11/2 & -5/2 \\ -5/2 & 11/2 \end{bmatrix}$$

4) $\det(A^{-2}B) = \det(A^{-2}) \cdot \det(B)$

$$= (1 \cdot \tfrac{1}{4})(3 \cdot 4) = \underline{\underline{3}}.$$

5) $D_A^{-2} D_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Egenværdien for $A^{-2}B$ hørende til v_1 er 3, så $A^{-2}B v_1 = 3 v_1 = \underline{\underline{(3,3)}}$.

6)
$$p(AB) = Q \begin{bmatrix} p(3) & 0 \\ 0 & p(8) \end{bmatrix} Q^T =$$

$$Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opg 3

$$\int \cos(2ax)\cos^2(ax)\,dx =$$

$$\int \left(\frac{e^{i2ax}+e^{-i2ax}}{2}\right)\left(\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (e^{i2ax}+e^{-i2ax})(e^{i2ax}+e^{-i2ax}+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int e^{i4ax}+1+2e^{i2ax}+1+e^{-i4ax}+2e^{-i2ax}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (e^{i4ax}+e^{-i4ax})+2(e^{i2ax}+e^{-i2ax})+2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos(4ax)+2\cos(2ax)+1\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4a}\sin(4ax)+\frac{1}{a}\sin(2ax)+x\right)+k.$$

Opg 3

a) $z^2 = 3 + i2$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, så

$x^2 - y^2 = 3 \qquad 2xy = 2$. Da $x, y \neq 0$ er

$y = \frac{1}{x}$ så

$x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 3 \iff x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

$x^2 = u > 0 \qquad u^2 - 3u - 1 = 0$

$u = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3}{2} (\pm) \frac{\sqrt{13}}{2}$

kun + dur da $u > 0$. Så er $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})}$ og

Så er $z = x + iy = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})} + i\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(3+\sqrt{13})}}\right)$

Opg 4

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (g(x))^n \quad , g(x) = \frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 1} = \frac{1}{(e^x - 1)^2}$

Konvergent når $|g(x)| < 1$, dvs $\frac{1}{(e^x-1)^2} < 1$

dvs $1 < (e^x - 1)^2$, hvorfor

$1 < (e^x - 1)$

$\Updownarrow$

$2 < e^x$

$\ln(2) < x$

2) For $\ln(2) < x$ er

$$f(x) = \frac{1}{1-g(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(e^x-1)^2}}$$

$$\left(= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x-1)^2-1} \right) \quad (\text{evt.})$$

3) Monotoniforhold som $g(x) = (e^x-1)^{-2}$

$g'(x) = -2(e^x-1)^{-3} \cdot e^x < 0$ for $x > \ln(2)$. f er altså aftagende og dermed injektiv.

4) For $x \to \ln(2)^+$ vil $f(x) \to \infty$

For $x \to \infty$ vil $f(x) \to 1$

$$Vm(f) =]1, \infty[$$

5)

$$\frac{1}{1-(e^x-1)^{-2}} = y \quad , \quad \underline{y > 1.}$$

$$1 = y - y(e^x-1)^{-2}$$

$$y(e^x-1)^{-2} = y-1$$

$$(e^x-1)^{-2} = \frac{y-1}{y} \quad (>0, \text{ NB!})$$

$$(e^x-1) = \sqrt{\frac{y}{y-1}} \quad (\text{kun + da } e^x-1 \geq 0)$$

$$e^x = 1+\sqrt{\frac{y}{y-1}} \quad , \quad \underline{\underline{x = \ln\left(1+\sqrt{\frac{y}{y-1}}\right)}}$$